Penerapan Limit dan Turunan dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

MODUL TEMA 9

MATEMATIKA PAKET C
SETARA SMA/MA
KELAS XI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018

Penerapan Limit dan Turunan dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

MODUL TEMA 9

MATEMATIKA PAKET C
SETARA SMA/MA
KELAS XI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018

Matematika Paket C - Setara SMA/MA kelas XI
Modul Tema 9 : Penerapan Limit dan Turunan dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

- **Penulis:** Nursanto
- **Diterbitkan oleh**: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018

vi+ 14 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2018
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

MODUL 9: Penerapan Limit Dan Turunan Dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

Petunjuk Penggunaan Modul ....
Tujuan yang diharapkan setelah mempelajari modul
Pengantar Modul ....

Unit 9.1 : Limit Fungsi - Menaksir Nilai Terbaik
Uraian Materi 9. 1.1 : Pengertian Limit
Latihan 9.1.1
Uraian Materi 9. 1.2 : Cara menentukan Limit dan Sifat-sifat Limit
Latihan 9.1.2
Uraian Materi 9. 1.3 : Sifat-Sifat Limit Fungsi
Latihan 9.1.3
Uraian Materi 9. 1.4 : Limit Fungsi Bentuk Tak hingga
Soal Latihan 9.1.4.a
Latihan Soal 9.1.4.b
Unit 9. 2 : Laju Perubahan
Uraian Materi 9.2.1 : Pengertian Turunan Fungsi
Latihan 9.2.1
Uraian Materi 9.2.2 : Rumus Fungsi Turunan Fungsi Aljabar
Latihan 9.2.2
Uraian Materi 9.3 : Laju Gerak Benda (Obyek)
Latihan 9.3:
Rangkuman
Kriteria Pindah Modul
Kunci Jawaban
Kunci Jawaban Latihan 9.1.1
Kunci Jawaban Latihan 9.1,2
Kunci Jawaban Latihan 9.1,3
Kunci Jawaban Soal Latihan 9.2.1
Kunci Jawaban Latihan 9.2.2
Kunci Jawaban Latihan 9.3
Daftar Pustaka

MODUL 9
Penerapan Limit Dan Turunan Dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini mengulas tentang penerapan konsep **limit dan turunan.** Limit fungsi merupakan nilai fungsi yang diperoleh melalui proses pendekatan atau dengan variabel x, baik dari arah x yang lebih kecil, maupun dari arah x yang lebih besar, memahami tentang pengertian limit fungsi, sifat-sifat limit fungsi, limit fungsi aljabar yang di antaranya adalah limit fungsi bentuk tak tentu maupun limit fungsi tak berhingga. Konsep turunan akan menambahkan pemahaman tentang turunan fungsi, baik berupa pengertian turunan fungsi, dan juga rumus turunan fungsi.Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah di pelajarinya.Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, dan dibuat berurutan sesuai de ngan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai.Untuk itu, sebelum mempelajari modul ini sebaiknya.

1. Baca pengantar modul untuk mengetahui arah pengembangan modul
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini

Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

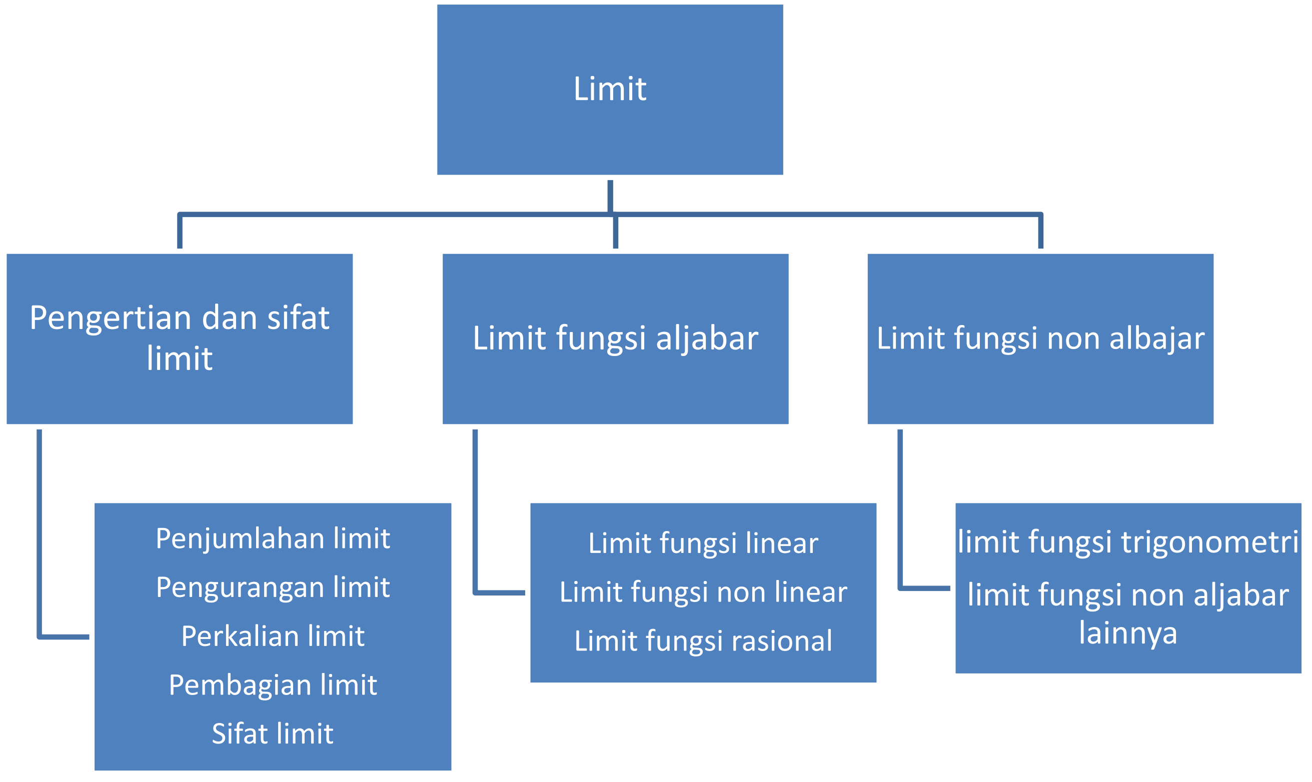
1. Memahami konsep limit dan turunan dan penerapannya dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.
2. Terampil dan mampu menerapkan limit dan turunan dalam kehidupan sehari-hari.
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan kehidupan sehari-hari. Secara khusus, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan memiliki kemampuan pengetahuan dan keterampilan dalam menemukan konsep matriks dan menyelesaikan masalah kontekstual; menentukan, menggunakan, dan menyelesaikan masalah limit dan turunan..

Pengantar Modul

Konsep limit banyak diterapkan dalam berbagai macam bidang dalam kehidupan sehari-hari. Misal, seorang berdiri mengawasi mobil yang masuk lewat pintu jalan tol. Kemudian dia memandang mobil itu terus sampai melintas di kejauhan jalan tol. Dia melihat objek seakan-akan semakin mengecil seiring dengan bertambah jauhnya mobil itu melintas. Akhirnya dia sama sekali tidak dapat melihat objek tersebut. Ukuran mobil di kejauhan seakan-akan semakin kecil. Lebar jalan raya juga seakan-akan semakin sempit.Contoh lainnya, produksi maksimum dari mesin suatu pabrik, dapat dikatakan merupakan **limit atau batas untuk pencapaian hasil**. Istilah **yang sedekat dekatnya, mendekati atau hampir, sedikit lagi, batas atas**, dan sejenisnya adalah konsep limit yang merupakan nilai pendekatan.

Konsep limit banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi misalnya dalam pembuatan kacamata untuk rabun jauh dan rabun dekat, menghitung rotasi bumi dan benda angkasa lainnya, menentukan perkiraan luas permukaan, kekuatan benda karena pengkaratan, bidang eknomi dan sebagainya.

Gambaran umum mengenai limit yang akan dipelajari dapat dipetakan sebagai berikut :



Uraian Materi 9. 1.1 : Pengertian Limit

Nilai limit fungsi merupakan nilai yang didekati fungsi apabila variabelnya mendekati nilai tertentu. Sebagai contoh, kita akan menyelidiki nilai yang didekati fungsi f(x) = x + 2, apabila nilai x mendekati 2. Tabel berikut akan memperlihatkan penyelidikan ini.

Mendekati 2 dari kiri *Mendeki 2 dari kanan*

X	1,9	1,99	1,999	1,9999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2,0001	2,001	2,01	2,1
F(x)=x+2	3,9	3,99	3,999	3,9999	$\rightarrow 4 \leftarrow$	4,0001	4,001	4,01	4,1

Perhatikan bahwa jika x mendekati 2, baik dari kiri (dari nilai-nilai yang kurang dari 2) maupun dari kanan (dari nilai-nilai yang kurang dari 2) maka nilai f(x) akan mendekati 4. Dikatakan bahwa limit dari fungsi f(x) = x + 2 , jika x mendekati 2 adalah 4; dan ditulis $\lim\limits_{x \to 2}(x+2)=4$. Bandingkan dengan nilai $f(x)=x+2$ pada x = 2, yakni $f(2)=2+2=4$.

Sekarang, kita tentukan nilai limit dari fungsi $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. Fungsi ini tidak terdefinisi (tidak dapat ditentukan nilainya) jika x = 1, tetapi kita dapat menyelidiki nilai f(x) jika x sangat dekat ke 1. Berapakah nilai f(x) jika nilai x mendekati 1?. Untuk menjelaskan hal ini kita ambil dua arah, *pertama* nilai-nilai x mendekati 1 tetapi lebih kecil 1 (pendekatan dari kiri), misal 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999 …… Kedua, untuk nilai-nilai x mendekati 1 tetapi lebih besar dari 1 (pendekatan dari kanan), misal 1,01 ; 1,001 ; 1,001 ; 1,0001 ; …………. Untuk itu perhatikan tabel nilai fungsi berikut :

X	0,9	0,99	0,999	0,9999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01	1,1
F(x)= $\frac{x^2-1}{x-1}$	1,9	1,99	1,999	1,9999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2,0001	2,001	2,01	2,1

Mendekati 1 dari kiri *Mendeki 1 dari kanan*

Dari tabel tampak bahwa untuk nilai x mendekati 1, baik dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ mendekati 2. Dengan demikian, dinyatakan bahwa $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

Perhatikan bahwa $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, jika x mendekati 1 (jadi $x \neq 1$) dapat disederhanakan sebagai berikut :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=x+1,$$

sehingga untuk $x \to 1$ nilai $f(x)=x+1$. Jadi, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$.

Dari uraian di atas, kita dapat memahami pengertian limit fungsi. Secara intuitif pengertian limit dapat difahami sebagai berikut :

> Limit dari fungsi $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L, kita tulis $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$,
>
> apabila nilai *f*(*x*) mendekati *L* ketika *x* mendekati nilai *a*.

Notasi x → a dibaca "x mendekati a".

Penugasan 9.1 :

> Diskusilah dengan teman-teman Anda untuk menyelidiki nilai $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, jika
>
> $$f(x)=\begin{cases}5x & , x\le 5\\ 5x+6, & x>5\end{cases}$$
>
> dengan menyelidiki nilai yang didekati oleh f(x) jika nilai x mendekati 5, dari kiri maupun dari kanan, seperti diuraikan di atas.

Hasil diskusi Anda tentu didapat hasil yang berbeda antara pendekatan dari kiri (limit kiri) dan dari kanan (limit kanan). Karena untuk x ≤ 5 berlaku $f(x)=5x$ maka nilai limit kiri fungsi f (x) dapat ditentukan sebagai berikut :

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}5x=5(5)=25.$$

Dengan cara serupa, untuk x > 5 berlaku $f(x)=5x+6$, sehingga nilai limit kanan fungsi f(x) adalah

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}(5x+6)=5(5)+6=31.$$

Sehingga limit kanan dan limit kirinya tidak sama. Dikatakan fungsi f(x) tersebut tidak memiliki limit di x = 5. Jadi, nilai limit fungsi ada apabila limit kiri dan limit kanannya sama, yaitu:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ ada jika dan hanya jika } \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)$$

Contoh 1 :

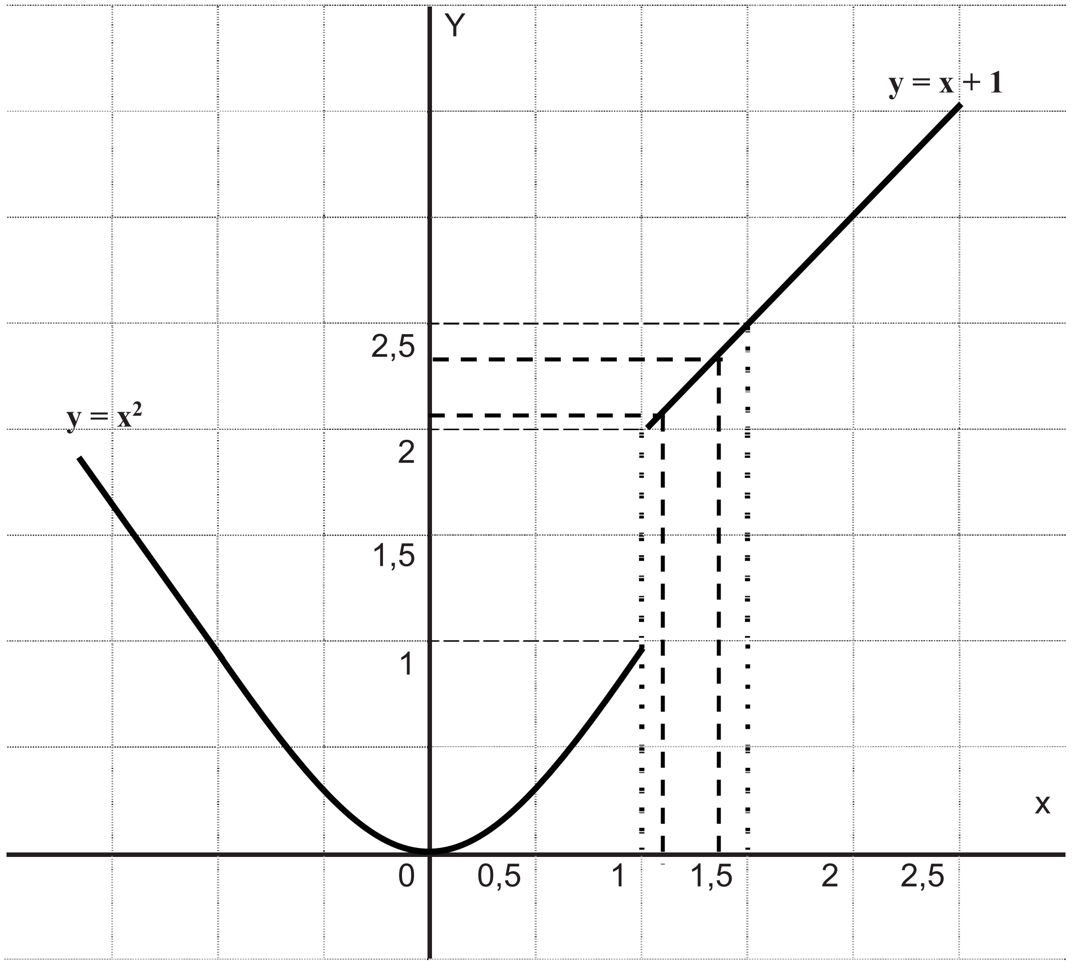
Tentukan (jika ada) nilai $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, jika f(x) = $\begin{cases}x^2 & jika\ x\ \le 1\\ x+1 & jika\ x\ >1\end{cases}$.

Penyelesaian :

Nilai-nilai pendekatan f(x) = $\begin{cases}x^2 & jika\ x\ \le 1\\ x+1 & jika\ x\ >1\end{cases}$ untuk nilai-nilai x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

X	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
Y	0	0,25	0,49	0,81	0,98	0,998	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan tabel di atas, f(x) akan mendekati 1 pada saat x mendekati 1 dari kiri sementara f(x) mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dari kanan. Jadi nilai limit kiri dan kanannya tidak sama. Hal inimengakibatkan f(x) tidak mempunyai limit pada saat x mendekati 1. Secara geometris dapat diperlihatkan sebagai berikut.



Penugasan 9.2 :

Diskusilah dengan teman-teman Anda untuk menyelidiki apakah $f(x)$, dengan

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 2 \\ x+2, & x \geq 2 \end{cases}$$

mempunyai limit dengan menyelidiki nilai kiri dan limit kanan, seperti diuraikan di atas.

Kesimpulan :

Dari uraian di atas tentu Anda dapat menyimpulkan pengertian limit berikut :

- Nilai limit fungsi merupakan nilai yang didekati fungsi apabila variabelnya mendekati nilai tertentu.
- Fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai limit di suatu titik jika dan hanya jika limit kiri dan kanan di titik itu bernilai sama.

Latihan 9.1.1

Tentukan limit fungsi berikut (jika ada), dengan menyelidiki limit kiri dan limit kanan !

1. $\lim\limits_{x \to 1} (x+3)$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$
3. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, jika $f(x) = \begin{cases} x-1; & x<3 \\ x; & x \geq 3 \end{cases}$
4. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, jika $f(x) = \begin{cases} x+2; & x<2 \\ 4; & x \geq 2 \end{cases}$

Uraian Materi 9.1.2 : Cara menentukan Limit dan Sifat-sifat Limit

Untuk menentukan limit fungsi dengan cara seperti diuraikan pada uraian materi 1 tentu tidak praktis. Limit suatu fungsi dapat secara langsung ditentukan dengan substitusi nilai di titik limitnya, atau dengan terlebih dahulu melakukan manipulasi operasi matematika seperti faktorisasi aljabar, merasionalkan dan menyederhanakan penyebut. Beberapa contoh berikut akan menjelaskan cara menghitung limit.

Sebagai contoh, kita akan menyelidiki nilai yang didekati fungsi f(x) = x + 2, apabila

Contoh 1.

Jika f(x) = 2x + 1, tentukan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Penyelesaian

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x+1)$ = 2(2) + 1 = 5

Contoh 2.

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Penyelesaian.

Karena $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ = x+1, x ≠ 1, maka untuk x → 1 (berarti x ≠ 1 juga) berlaku $\frac{x^2-1}{x-1}$ = x+1 sehingga didapat $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} x+1 = 1+1 = 2$.

Penugasan 9.3 :

Diskusilah dengan teman-teman Anda untuk menentukan nilai limit berikut !

1. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2+1)$
2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{(x+2)(x-1)}$

Latihan 9.1.2

Tentukan limit fungsi berikut !

1. $\lim\limits_{x \to 0} (3x+5)$
2. $\lim\limits_{x \to 5} (x^2+3)$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-1}{2x+1}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+8}$
5. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{(x^2-9)}$

Uraian Materi 9.1.3 : Sifat-Sifat Limit Fungsi

Seringkali sifat-sifat limit berikut perlu digunakan untuk menentukan nilai limit suatu fungsi, khususnya fungsi yang rumit.

Misalkan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, maka berlaku sifat berikut:

1. $\lim\limits_{x \to a} k$ = k; k konstan
2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$ = A ± B
3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$ = A x B
4. $\lim\limits_{x \to a} [k.f(x)] = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$ = k. A

5. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$; dengan syarat b ≠0

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = A^n$

7. $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt{A}$

Contoh 1.

Tentukan nilai limit fungsi berikut:

a. $\lim_{x\to 2} 5$ b. $\lim_{x\to 2} (2x-3)$ c. $\lim_{x\to 2} (x+1)(x-3)$

d. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2}{x-2}$ e. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^3$ f. $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{3x}{x^2-2x}}$

Jawab

a. $\lim_{x\to 2} 5 = 5$, dengan sifat 1

b. $\lim_{x\to 2} (2x-3) = \lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 3 = 2.\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3 = 2.2-3 = 4-3 = 1$, dengan sifat 1,2,4

c. $\lim_{x\to 2}(x+1)(x-3) = \lim_{x\to 2}(x+1).\lim_{x\to 2}(x-3) = (2+1)(2-3) = 3(-1) = -3$, dengan sifat 3

d. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 5} x^2}{\lim_{x\to 5} (x-2)}$, sifat 5

$= \frac{5^2}{(5-2)}$

$= \frac{25}{3}$

e. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^3 = \left(\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-3}\right)^3$, sifat 6

$= \left(\frac{\lim_{x\to 2} (x+1)}{\lim_{x\to 2} (x-3)}\right)^3$, sifat 5

$= \left(\frac{2+1}{2-3}\right)^3$, sifat 1 dan 2

$= \left(\frac{3}{-1}\right)^3$

$= (-3)^3$

$= -27$

f. $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{3x}{x^2+2x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x^2+2x}}$, sifat 7

$= \sqrt{\frac{3}{2}}$, sebab $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x(x+2)} = \frac{3}{0+2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Latihan 9.1.3

Tentukan limit fungsi berikut !

1. $\lim_{x\to 3} 7$
2. $\lim_{x\to 4} (3x-2)$
3. $\lim_{x\to 2} (x-1)(x+3)$
4. $\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x^2}$
5. $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3$
6. $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2+9x}{3x}}$

Uraian Materi 9. 1.4 : Limit Fungsi Bentuk Tak hingga

Limit fungsi bentuk tak tentu adalah limit fungsi yang apabila disubstitusikan langsung nilai limit pada variabelnya menghasilkan nilai fungsi berbentuk $\frac{0}{0}$, bentuk pembagian dengan nol, bentuk $\frac{\infty}{\infty}$, atau bentuk ∞ – ∞. Penentuan limit fungsi yang memiliki bentuk tak tentu dilakukan dengan melakukan operasi dan manipulasi matematika sehingga menghasilkan nilai limit tertentu, nilai positif tak hingga (membesar tanpa batas), atau nilai negatif tak hingga (mengecil tanpa batas). Sebagai contoh,, kita akan menentukan nilai $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.

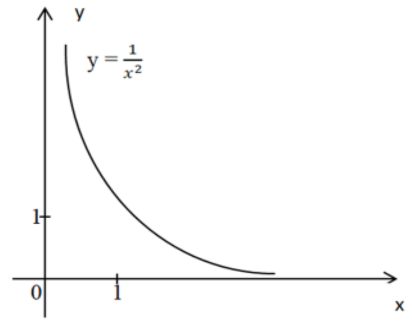
Nilai limit fungsi tersebut apabila disubstitusikan langsung untuk variable x = 3, akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$. Dengan mengubah ke bentuk matematika yang lebih sederhana, diperoleh $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6$, dengan $x \neq 3$. Perhatikan bahwa x →3, berarti x mendekati 3, artinya x ≠ 3 sehingga langkah penyederhanaan tersebut benar.

Sedangkan, Limit fungsi tak hingga adalah limit fungsi dengan variabelnya mendekati positif tak hingga atau negatif tak hingga. Limit fungsi tak hingga dapat menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$, negatif tak hingga (-∞), positif tak hingga (∞), bentuk pembagian dengan nol, bentuk pembagian dengan bilangan tak hingga (∞), bentuk $\frac{\infty}{\infty}$, atau bentuk ∞ – ∞.

Limit Fungsi Bentuk pembagian tak hingga

Diberikan sebuah fungsi f(x) = $\frac{1}{x^2}$. Apa yang terjadi dengan fungsi f(x), jika nilai x semakin besar ? Untuk menjawab pertanyaan ini, mari kita amati nilai fungsi f(x) untuk nilai-nilai x berikut.

x = 1 → f(x) = 1
x = 10 → f(x) = 0,01
x = 100 → f(x) = 0,0001
x = 1000 → f(x) = 0,000001
...
Dari data diatas dapat kita lihat bahwa nilai f(x) semakin mendekati 0, ketika x semakin besar. Sekarang coba perhatikan grafik fungsinya.



Jelas terlihat bahwa kurva y = $\frac{1}{x^2}$ semakin mendekati garis y = 0, ketika x semakin besar. Faktanya, seberapa besarpun x yang kita ambil, nilai $\frac{1}{x^2}$akan semakin dekat ke 0.

Secara intuitif kita simpulkan, jika x semakin besar tanpa batas, nilai $\frac{1}{x^2}$ semakin dekat ke 0. Dalam notasi limit, pernyataan ini ditulis $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{1}{x^2} = 0$

Sekarang coba kita amati nilai fungsi f(x) = $\frac{1}{x^2}$ untuk nilai-nilai x berikut.
x = -1 → f(x) = 1
x = -10 → f(x) = 0,01
x = -100 → f(x) = 0,0001
x = -1000 → f(x) = 0,000001

Dari data diatas dapat kita lihat bahwa f(x) = $\frac{1}{x^2}$ juga semakin dekat ke 0, ketika x semakin kecil (negatif besar). Kita tulis $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$=0

Nilai fungsi f(x) tidak selalu mendekati bilangan tertentu, ketika x semakin besar. Bisa saja nilai f(x) justru semakin besar dan terus bertambah besar tanpa batas. Untuk kasus seperti ini, kita tulis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

artinya jika nilai x semakin besar tanpa batas, maka nilai f(x) juga semakin besar tanpa batas. Limit seperti ini disebut **limit tak hingga di tak hingga**.

Contoh 1
Tentukan $\lim\limits_{x \to \sim} x^2$

Jawab :
Misalkan f(x) = x^2
x = 1 → f(x) = 1
x = 10 → f(x) = 100
x = 100 → f(x) = 10000
...
Seperti yang kita lihat, ketika x semakin besar, nilai x^2 juga semakin besar, namun tidak mendekati suatu bilangan unik tertentu, melainkan terus bertambah besar tanpa batas.

Kita simpulkan $\lim\limits_{x \to \sim} x^2 = \sim$

Perlu diketahui, **teorema limit dasar** masih bisa kita terapkan pada limit di tak hingga. Namun, untuk kasus-kasus yang melibatkan bentuk tak tentu, seperti (~- ~), $(\frac{\sim}{\sim})$ atau (0. ~), perlu dilakukan manipulasi aljabar terlebih dahulu.

Jika n > 0 dan n bilangan rasional, maka

1. $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{1}{x^n} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{1}{x^n} = 0$, x^n terdefinisi untuk x < 0

Sifat A

Contoh 2
Hitung $\lim\limits_{x \to \sim} (x^3 - 7x^2)$

Jawab :
Faktorkan suku pangkat tertinggi dari polinom tersebut, kemudian hitung limit dari masing-masing faktor dengan berpedoman pada sifat A.

$$\lim_{x \to \sim} (x^3 - 7x^2) = \lim_{x \to \sim} x^3 . \left(1 - \frac{7}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \sim} x^3 \cdot \lim_{x \to \sim} \left(1 - \frac{7}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \sim} x^3 \cdot (1 - 0)$$

$$= \lim_{x \to \sim} x^3 \quad = \sim$$

Contoh 3

Tentukan $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{x^3-4x}{x^3+x^2}$

Jawab :

Bagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi dari penyebut, yaitu x^3, kemudian hitung limit dari masing-masing suku dengan berpedoman pada sifat A.

$$\lim_{x \to \sim} \frac{x^3-4x}{x^3+x^2} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{x^3-4x}{x^3}}{\frac{3x^3+x^2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{3+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1-0}{3+0}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Contoh 4

Hitung $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{x^3-x}{x^4+2x^2+1}$

Jawab :

Bagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi dari penyebut, yaitu x^4, kemudian hitung limitnya.

$$\lim_{x \to \sim} \frac{x^3-x}{x^4+2x^2+1} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{x^3-x}{x^4}}{\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{0-0}{1+0-0}$$

$$= 0$$

Contoh 5

Tentukan $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{x-x^3}{x^2-4}$

Jawab :

Bagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi dari penyebut, yaitu x^2, kemudian hitung limitnya.

$$\lim_{x \to \sim} \frac{x-x^3}{x^2-4} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{x-x^3}{x^2}}{\frac{x^2-4}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{1}{x}-x}{1-\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \sim} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x \to \sim} x}{\lim\limits_{x \to \sim} 1 - \lim\limits_{x \to \sim} \frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{0 - \lim\limits_{x \to \sim} x}{1-0}$$

$$= - \lim_{x \to \sim} x$$

$$= - \sim$$

Sifat B

Jika p(x) dan q(x) adalah fungsi polinom dengan ax^m dan bx^n berturut-turut adalah suku pangkat tertinggi dari p(x) dan q(x), maka

1. $\lim\limits_{x \to \pm\sim} p(x) = \lim\limits_{x \to \pm\sim} aX^m$
2. $\lim\limits_{x \to \pm\sim} q(x) = \lim\limits_{x \to \pm\sim} bX^n$
3. $\lim\limits_{x \to \pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x \to \pm\sim} \frac{aX^m}{bX^n}$

Sifat diatas mengatakan bahwa nilai limit di tak hingga fungsi polinom ataupun rasional sama dengan nilai limit dari suku pangkat tertingginya. Dengan menggunakan sifat diatas, contoh 2 - 4 dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut.

$$\lim_{x \to \sim} (x^3 - 7x^2) = \lim_{x \to \sim} x^3 = \sim$$

$$\lim_{x \to \sim} \frac{x^3-4x}{3x^3+x^2} = \lim_{x \to \sim} \frac{x^3}{3x^3} = \lim_{x \to \sim} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to \sim} \frac{x^3-x}{x^4+2x^2+1} = \lim_{x \to \sim} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \to \sim} \frac{1}{x} = \lim_{x \to \sim} \frac{1}{\sim} = 0$$

$$\lim_{x \to \sim} \frac{x-x^3}{x^2-4} = \lim_{x \to \sim} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \to \sim} (-x) = -\sim$$

Berdasarkan pangkat tertinggi pembilang dan penyebutnya, sifat B.3 dapat kita jabarkan lagi menjadi sebagai berikut.

Sifat C

Misalkan p(x) dan q(x) adalah fungsi polinom dengan ax^m dan bx^n berturut-turut adalah suku pangkat tertinggi dari p(x) dan q(x).

1. Jika m = n maka $\lim\limits_{x\to\pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{b}$
2. Jika m < n maka $\lim\limits_{x\to\pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$
3. Jika m > n maka $\lim\limits_{x\to\pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \sim, & \frac{a}{b} > 0 \\ \sim, & \frac{a}{b} < 0 \end{cases}$

Sifat diatas dapat kita terjemahkan dalam tiga poin berikut.

1. Jika pangkat tertinggi pembilang = pangkat tertinggi penyebut, nilai limitnya adalah koefisien pangkat tertinggi pembilang dibagi koefisien pangkat tertinggi penyebut.
2. Jika pangkat tertinggi pembilang < pangkat tertinggi penyebut, nilai limitnya = 0.
3. Jika pangkat tertinggi pembilang > pangkat tertinggi penyebut, nilai limitnya = ~ (asalkan perbandingan koefisiennya positif) atau - ~ (asalkan perbandingan koefisiennya negatif)

Dengan menggunakan sifat C, contoh 2, 3 dan 4 dapat diselesaikan cukup dengan memperhatikan suku pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut, dalam hal ini adalah pangkat dan koefisiennya.

$$\lim_{x\to\sim} \frac{x^3-4x}{3x^3+x^2} = \lim_{x\to\sim} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

Keterangan : Pangkat tertinggi pembilang sama dengan pangkat tertinggi penyebut. Berdasarkan sifat C.1, nilai limitnya adalah koefisien pangkat tertinggi pembilang dibagi koefisien pangkat tertinggi penyebut, yaitu $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to\sim} \frac{x^3-x}{x^4+2x^2+1} = \lim_{x\to\sim} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to\sim} \frac{1}{x} = 0$$

Keterangan : Pangkat tertinggi pembilang < pangkat tertinggi penyebut. Berdasarkan sifat C.2, nilai limitnya = 0.

$$\lim_{x\to\sim} \frac{x-x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to\sim} \frac{-x^3}{x^2} = -\sim$$

Keterangan : Pangkat tertinggi pembilang > pangkat tertinggi penyebut dan perbandingan koefisiennya negatif. Berdasarkan sifat C.3, nilai limitnya = - ~.
Penyelesaian limit di tak hingga fungsi irasional (memuat fungsi irasional) hampir sama saja dengan fungsi polinom atau rasional. Sifat-sifat diatas masih dapat kita gunakan. Yang perlu kita cermati adalah saat bekerja dengan limit untuk x → - ~.

Perlu kita ingat !
Jika $x > 0$ maka $\sqrt{x^2} = x$
Jika $x < 0$ maka $\sqrt{x^2} = -x$

Secara umum, dapat dinyatakan sebagai berikut !

1. Untuk n > 0 dan n ganjil maka
   $\sqrt{x^{2n}} = \begin{cases} x^n, & x > 0 \\ -x^n, & x < 0 \end{cases}$
2. Untuk n > 0 dan n genap maka
   $\sqrt{x^{2n}} = x^n,\ x \in R$

Contoh 6

Hitung limit berikut !

a. $\lim\limits_{x\to\sim} \frac{\sqrt{4x^2+3x}}{2x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to-\sim} \frac{\sqrt{4x^2+3x}}{2x-1}$

Jawab :

Untuk x→~ maka $\sqrt{x^2} = x$
Untuk x→−~ maka $\sqrt{x^2} = -x$

a. $$\lim_{x\to\sim} \frac{\sqrt{4x^2+3x}}{2x-1} = \lim_{x\to\sim} \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{3}{x})}}{x\,(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to\sim} \frac{x\sqrt{(4+\frac{3}{x})}}{x\,(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to\sim} \frac{\sqrt{(4+\frac{3}{x})}}{(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{\sqrt{4+0}}{2-0}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

b. $$\lim_{x\to-\sim} \frac{\sqrt{4x^2+3x}}{2x-1} = \lim_{x\to-\sim} \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{3}{x})}}{x\,(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{-x\sqrt{(4+\frac{3}{x})}}{x\,(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{-\sqrt{(4+\frac{3}{x})}}{(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{-\sqrt{4+0}}{2-0}$$

$$= \frac{-\sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{-2}{2}$$

= -1

Contoh diatas dapat pula diselesaikan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi dari penyebut, yaitu *x*. Dengan catatan, untuk limit $x \to -\sim$, nilai $x = -\sqrt{x^2}$

Soal Latihan 9.1.4.a

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \sim} \frac{4x^4 + 2x^3 - 5x + 4}{2x^4 - 4x^2 + 9} = \ldots.$
2. Nilai dari $\lim_{x \to \sim} \frac{(8x-2)^2}{(4x+1)^2}$ = adalah ….
3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \sim} \frac{2x^2 - x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \ldots.$
4. Nilai dari $\lim_{x \to \sim} \frac{5x^2 - 2x + 2}{4x - 3}$ adalah….
5. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \sim} \frac{3x - 1}{x^2 + 5x - 3} = \ldots.$

Latihan Soal 9.1.4.b

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to -2} 2x$ adalah....
2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ adalah....
3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 1} \sqrt{2x^2}$ adalah....
4. Tentunkan nilai dari $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 3}$ adalah....
5. Tentunkan nilai dari $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 2x + 1}{5x^3 + 8x^2 + 6}$ adalah....

Uraian Materi 9.2.1 : Pengertian Turunan Fungsi

Jika dalam perjalanan dari Jakarta ke Bogor, speedometer suatu mobil yang kita tumpangi menunjukkan angka 90 km/jam berarti kecepatan mobil tersebut setiap saat tetap atau tidak ada perubahan? Pada kenyataannya hal ini jarang terjadi.Terkadang kecepatan mobil bertambah atau berkurang. Timbul pertanyaan : "Berapakah kecepatan mobil pada saat tertentu?". Hal ini mudah dipahami bahwa panjang jarak yang ditempuh sangat tergantung dengan waktu yang digunakan untuk bergerak.Sedangkan hasil bagi antara perubahan jarak dengan perubahan waktu disebut kecepatan rata-rata, maka dapat dikatakan bahwa kecepatan rata-rata mobil tersebut adalah 90 km/jam. Jika jarak yang ditempuh diberi notasi *s* dan waktu yang diperlukan diberi notasi *t*, maka dapat dirumuskan dengan *s = f(t)*, jarak *s* dinyatakan sebagai fungsi waktu *t*.

$t_1 = t \leftarrow$ interval waktu $h \rightarrow t_2 = t + h$

$\Downarrow\Downarrow$

s = f(t) ………………….. *s = f(t + h)*

perubahan letak benda

Pada gambar diatas, benda bergarak dengan persamaan gerak *s= f(t)*, maka kecepatan rata-rata ($\bar{v}$) pada saat $t_1 = t$ detik sampai $t_2 = t + h$ detik adalah :

$$\bar{v} = \frac{f(t+h)-f(t)}{(t+h)-t} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Jika *h* kecil sekali atau mendekati nol, maka kecepatan rata-ratanya disebut kecepatan sesaat. Laju perubahan jarak terhadap waktu dapat dinyatakan dengan :

$$\bar{v} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Jika suatu fungsi dinyatakan dengan y = *f (x)*, maka laju perubahan nilai fungsi dinyatakan dengan :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Laju perubahan nilai fungsi ini disebut fungsi turunan yang dilambangkan *f' (x)* (dibaca *f* aksen *x*).Jadi :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, untuk a < x < b memiliki nilai maka dikatakan bahwa fungsi *f* (x) mempunyai turunan dalam interval a < x < b. Proses mencari *f'* (x) dari *f* (x) disebut penurunan atau pendiferensialan.

Notasi lain untuk turunan fungsi adalah : y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Notasi $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$ untuk turunan diperkenalkan pertama kali oleh Leibniz (1646 – 1716), seorang ahli matematika asal Jerman.Oleh sebab itu lambang $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$ sering disebut sebagai lambang Leibniz atau turunan.

Contoh 1 :

1. Carilah turunan fungsi *f* yang dinyatakan dengan *f(x)* = 2x + 3 pada x = 5

Jawab :

f(x) = 2x + 3
f(5) = 2(5) + 3 (substitusikan x = 5 ke *f(x)* = 2x + 3)
= 13
f(5 + h) = 2(5 + h) + 3
= 10 + 2h + 3

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(10+2h+3)-(13)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2h+13)-(13)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2 = 2$$

2. Sebuah mobil bergerak dinyatakan dengan pernyataan $s = t^2 + 5t$ (*s* dalam meter dan *t* dalam detik). Tentukan kecepatan sesaat ($\bar{v}$) pada *t* = 2 detik

Jawab :

$s = t^2 + 5t \to f(t) = t^2 + 5t$

$$\bar{v} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$\bar{v} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$\bar{v} = \lim_{h\to 0} \frac{[(2+h)^2+5(2+h)]-[(2)^2+5(2)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2+10+5h-4-10}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(9+h)h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 9+h = 9+0 = 9$$

Jadi, kecepatan sesaat pada *t* = 2 detik adalah 9m/detik

Latihan 9.2.1:

1. Seseorang mengendarai sepeda pada lintasan garis lurus dengan persamaan gerak.
   s = *f* (t) = 15*t* + 4 dengan *s* dalam kilometer dan *t* dalam jam. Hitung kecepatan sesaat pada waktu *t* = 2 jam dan *t* = 4 jam.
2. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut:
   a) $f(x) = 5(2x^2 + 4x)$
   b) f(x) = (2x + 3)(5x + 4)
3. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus sehingga kedudukannya setelah x detik memenuhi persamaan $f(x) = 6x^3 + x^2$, dengan f(x) dinyatakan dalam meter.
   a. Tentukan kecepatan rata-rata benda dalam selang waktu $2 \le x \le 3$.
   b. Berapa kecepatan sesaat benda pada x = 2 detik?
4. Panjang sebuah persegipanjang sama dengan tiga kali lebarnya. Tentukan laju perubahan luas terhadap lebar untuk lebar = 5 cm.
5. Diketahui tinggi badan seorang anak pada usia 11 tahun sampai 12 tahun adalah tetap, yaitu T(t) = 120 cm. Tentukanlah laju pertumbuhan (laju pertumbuhan sesaat) tinggi badan anak tersebut. Jelaskan.

Uraian Materi 9.2.2 : Rumus Fungsi Turunan Fungsi Aljabar

Seperti yang telah kita pelajari sebelumnya, kita tahu bahwa turunan fungsi *f* (x) dapat ditentukan dengan rumus :

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Turunan fungsi diatas disebut turunan pertama dari fungsi *f* (x), sedangkan untuk turunan kedua dari *f* (x) biasa ditulis sebagai *f* ″(x) adalah turunan dari *f* ′(x) dan seterusnya.

(1) Turunan Fungsi Khusus
   a. Jika *f* (x) = c, dengan c konstanta real *f* ′(x) = 0

   Bukti :
   f (x) = c

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

   Jadi, **jika *f* (x) = c, maka *f* ′(x) = 0**

b. Jika $f(x) = ax$, dengan a konstanta maka $f'(x) = a$

Bukti :

$f(x) = ax$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)-ax}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{ax+ah-ax}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h}$

$= \lim_{h\to 0} a = a$

Jadi, **jika $f(x) = ax$, maka $f'(x) = a$**

c. Jika $f(x) = c\,.g(x)$, maka $f'(x) = c\,.\,g'(x)$

Bukti :

$f(x) = c\,.\,g(x)$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{c\,.\,g(x+h)-c\,.\,g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} c\,.\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$

$= c\,.\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= c\,.g'(x)$

Jadi, **Jika $f(x) = c\,.g(x)$, maka $f'(x) = c\,.g'(x)$**

d. Jika $f'(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif maka $f'(x) = nx^{n-1}$

Bukti :

Perhatikan pola suku dua yang dipangkatkan berikut ini :

$(x + h)^1 = x + h$

$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$\vdots$

$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1} + \ldots + \ldots$

Bentuk umum pola suku dua yang dipangkatkan adalah $(x + h)^n$, maka

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{(x^n + nx^{n-1}h + \ldots + h^n) - x^n\}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(nx^{n-1}h + \ldots + h^n)$

$= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + \ldots + h^{n-1})$

$= nx^{n-1}$

Jadi, **Jika $f'(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$**

(2) Aturan Rantai

- Jika $f(x) = [u(x)]^n$ dengan $u(x)$ adalah fungsi dari x yang mempunyai turunan $u'(x)$ dan n adalah bilangan real, maka :

$$f'(x) = n\,[u(x)]^{n-1}.\ u'(x)$$

Contoh 1 :

Carilah turunan fungsi-fungsi berikut :

a. $f(x) = (x^3 + 4)^6$

b. $f(x) = \sqrt{(2x^4 - 5x)}$

Penyelesaian :

a. Misalkan $u(x) = x^3 + 4$, sehingga $u'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 6\,(u(x))^5\,.\,u'(x)$

$= 6\,(x^3 + 4)^5\,.\,3x^2$

$= 18x^2\,.\,(x^3 + 4)^5$

b. Misalkan $u(x) = 2x^4 - 5x$, sehingga $u'(x) = 8x^3 - 5$ dan $f(x) = (u(x))^{\frac{1}{2}}$. Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh :

$f'(x) = \frac{1}{2}(u(x))^{-\frac{1}{2}}\,.\,u'(x)$

$= \frac{1}{2}(2x^4 - 5x)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(8x^3 - 5)$

$= \frac{8x3 - 5}{2\sqrt{2x^4 - 5}}$

Contoh 2 :

Carilah turunan dari setiap fungsi dibawah ini :

a. $f(x) = 10$

b. $f(x) = x^{-3}$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

d. $y = (x - 2)(x + 3)$

e. $y = (3x - 7)^3$

Penyelesaian :

a. $f(x) = 10 \to f'(x) = 0$

b. $f(x) = x^{-3} \to f'(x) = (-3).\ x^{-3-1} = -3x^{-4}$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x} \to f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

d. $y = (x - 2)(x + 3) \to x^2 + x - 6 \to y' = 2x + 1$

e. $y = (3x - 7)^3$

Misalkan $u(x) = 3x - 7$, maka $y(x) = (g(x))$

Sehingga diperoleh :

$y(x) = (u(x))^n \rightarrow y'(x) = n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$
$y'(x) = 3(3x-7)^{3-1} \cdot (3) = 9(3x-7)^2$

Latihan 9.2.2:

Tentukan turunan dari setiap fungsi berikut:

1. f (x) = $4x^3 + 2x^2 - 5$
2. f (x) = $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 25$
3. f (x) = $\frac{3}{\sqrt{x}}$
4. f (x) = $(x-3)(x+5)$
5. f (x) = $\sqrt[2]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Uraian Materi 9.3 : Laju Gerak Benda (Obyek)

Kecepatan (*velocity*) adalah besaran vektor yang menyatakan jarak perpindahan setiap satuan waktu.Pengertian kelajuan (*speed*) adalah besaran skalar atau besar jarak perpindahan yang ditempuh tiap satuan waktu.Dalam banyak masalah sehari-hari laju dianggap juga sama dengan kecepatan, misalnya sebuah bus bergerak maju dengan laju atau kecepatan 40 km/jam, artinya besar kecepatan bus tersebut adalah 40 km/jam. Laju atau kelajuan adalah besar kecepatan sehingga kelajuan dapat ditentukan dengan menentukan nilai mutlak dari kecepatan atau membandingkan jarak dengan waktu.

- Kecepatan dan Kelajuan rata-rata

Nilai kecepatan rata-rata dapat dihitung dengan membagi perpindahan total dengan waktu total, sedangkan kelajuan rata-rata dapat dihitung dengan membagi jarak total dengan waktu total. Berikut rumus kecepatan dan kelajuan, Kecepatan dituliskan dengan huruf $\vec{v}$ sedangkan dalam rumus kelajuan diberi simbol v(tanpa tanda vektor).

Rumus Kecepatan rata-rata $\vec{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$

Rumus Kelajuan rata-rata $v = |\vec{v}|$

$\overrightarrow{\Delta r}$ menyatakan besar perpindahan. Simbol ini kadang dituliskan hanya Δx atau Δy tergantung di sumbu apa benda yang sedang ditinjau. Satuan dari kecepatan dan kelajuan yang umum digunakan adalah meter/sekon dan disingkat m/s.

- Kecepatan Sesaat

Kecepatan sesaat adalah nilai kecepatan rata-rata dengan rentang waktu sangat kecil ($\Delta t \rightarrow 0$). Kecepatan dan kelajuan sesaat memiliki besar yang sama. Secara matematis dapat dituliskan sebagai.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Ingat, bagaimana menentukan kecepatan gerak benda (v) apabila benda itu berpindah dari satu tempat ke tempat lainnya. Besaran yang menunjukkan besar kecepatan gerak perpindahan benda itu disebut sebagai ***laju***.

Contoh 1 :

Diketahui jarak AB = 15 km. Sebuah mobil bergerak sepanjang garis dari A ke B selama 0,5 jam. Berapa kecepatan rata-rata (v_r) mobil itu selama bergerak dari A ke B?

Penyelesaian :

Rumus mencari kecepatan rata-rata (v_r) = $\frac{jarak\ yang\ ditempuh}{waktu\ yang\ diperlukan} = \frac{s}{t}$

dengan s = 15 km dan t = 0,5 jam

maka : $v_r = \frac{15\ km}{0{,}5\ jam}$

$= \frac{15\ km}{0{,}5\ jam} \times \frac{2}{2}$

$= \frac{15\ km \times 2}{0{,}5\ jam \times 2}$

$= \frac{30\ km}{1\ jam}$

= 30 km/jam

Tetapi dalam perjalanan, kecepatan mobil tersebut tidak selalu menunjukkan angka 30.Pada saat berangkat, kecepatan mobil menunjukkan angka 0, kemudian secara perlahan naik menjadi 10, 20, 30, 40, 60, 80, dan pada suatu saat di perjalanan pernah menunjukkan angka 35.Suatu saat mobil berjalan cepat, tetapi juga berjalan pelan.Kecepatan pada saat tertentu disebut kecepatan sesaat (v_s).

Coba selidiki kecepatan berikut :

Diberikan suatu rumus jarak (s) yang ditempuh sebagai fungsi waktu f(t) yaitu s = f(t) = $5t^2$. Jarak (s) dinyatakan dalam meter, dan waktu (t) dalam menit.

Berapakah kecepatan rata-rata untuk t = 3?
Berapakah kecepatan mobil pada saat t = 1?
Berapakah kecepatan mobil pada saat t = 2?
Berapakah kecepatan mobil pada saat t = 3?

Rumus kecepatan rata-rata, bila diketahui jarak sebagai fungsi waktu adalah :

$$v_r = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

Rumus diatas, artinya kecapatan rata-rata pada selang (interval) waktu t sampai ($t + \Delta t$), dengan Δt adalah selisih waktu awal dan waktu akhir. Untuk soal diatas, t = 0 dan Δt = 3, maka :

$$v_r = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{f(0+3) - f(0)}{(0+3) - 0}$$

$= \frac{f(3)-f(0)}{3}$

$= \frac{5.3^2-5.0^2}{3}$

$= \frac{45}{3}$

= 15 meter/menit

Apabila ∆t pada rumus kecepatan rata-rata diatas mendekati nol (∆t → 0) dan dengan mengambil limitnya, maka didapat kecepatan sesaat (v_s). Dengan kata lain, kecepatan sesaat adalah kecepatan benda pada waktu tertentu.

$$v_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{(t+\Delta t)-t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5.(t+\Delta t)^2 - 5.t^2}{(t+\Delta t)-t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5.(t^2+2.t.\Delta t+\Delta t^2) - 5.t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5t^2 + 10.t.\Delta t + 5\Delta t^2 - 5t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5t^2 - 5t^2 + 10.t.\Delta t + 5\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10.t.\Delta t + 5\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10.t.\Delta t + 5\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} 10.t + 5\Delta t^2$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} 10.t + 5(0)^2$$

= 10.t

Kecepatan sesaat pada t = 1, adalah v_s = 10.t = 10.1 = 10 meter/menit
Kecepatan sesaat pada t = 2, adalah v_s = 10.t = 10.2 = 20 meter/menit
Kecepatan sesaat pada t = 3, adalah v_s = 10.t = 10.3 = 30 meter/menit
Tampak bahwa, kecepatan sesaat berubah-ubah dari waktu ke waktu.Hal ini menunjukkan, mula-mula mobil diam, kemudian bergerak makin cepat.

Contoh 2 :

1. Beni dapat berlari menempuh jarak 120 meter dalam waktu 60 detik, kemudian Beni mempercepat lari sehingga dapat menempuh jarak 150 m dalam waktu 60 detik. Karena energi beni berkurang, Beni hanya mampu menempuh jarak 100 meter dalam waktu 120 detik sampai Beni berhenti. Kelajuan rata-rata lari Beni adalah . . .
   Jawab:
   $\bar{v} = \frac{120m+150m+100m}{60dt+60dt+120dt} = \frac{370m}{240dt}$ = 1,54m/dt
2. Jarak Bandung-Jakarta adalah 180 km. Sebuah mobil mampu menempuh jarak tersebut dalam waktu 3 jam. Maka kelajuan rata-rata mobil tersebut adalah… .
   Jawab:
   $v = \frac{180\ km}{3\ jam}$
   = 60 km/jam
3. Sebuah benda bergerak dengan mengikuti persamaan $x = 2t^2 + 4t$– 2. Diketahui x adalah perpindahan yang ditempuh benda (dalam meter) dan t adalah waktu tempuh (sekon). Maka kecepatan rata-rata pada saat t = 1s dan t = 2s adalah …
   Jawab:
   Perpindahan saat t = 1s adalah:
   $x_1 = 2(1)^2 + 4(1) – 2 = 4$
   Perpindahan saat t = 2s adalah:
   $x_2 = 2(2)^2 + 4(2) – 2 = 14$
   Maka kecepatan rata-rata benda tersebut adalah $\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{14-4}{2-1} = \frac{10}{1}$ = 10 m/**s.**

Penerapan turunan sebagai laju perubahan tidak terbatas pada laju gerak benda, tetapi juga pada lainnya seperti pertumbuhan populasi tumbuhan, hewan, penduduk, ekonomi, dan sebagainya.

Contoh 3 :

Suatu perusahaan memproduksi x unit barang dengan biaya sebesar $(4x^2–8x+24)$ ribu rupiah per unitnya. Jika barang tersebut terjual habis dengan harga Rp40.000,00 per unit, maka berapa keuntungan maksimum yang diperoleh?
Jawab.

Misalkan C(x) menyatakan total biaya produksi x unit barang, V(x) menyatakan harga jual x unit barang dalam ribu rupiah, dan P(x) menyatakan keuntungan yang diperoleh atas penjualan x unit barang. Maka,
Untuk x unit barang, biaya produksi adalah (dalam ribu rupiah)
$C(x) = x(4x^2–8x+24) = 4x^3–8x^2+24x$
Harga jual atas x unit barang adalah (dalam ribu rupiah)
$V(x) = 40x$
Keuntungan penjualan atas x unit barang (dalam ribu rupiah)
$P(x) = V(x) - C(x) = 40x - (4x^3–8x^2+24x) = 8x^2–4x^3 + 16x$

Untuk x semakin besar, maka nilai P semakin negatif tanpa batas. Untuk mencari keuntungan maksimum, nilai turunan pertama harus nol, yaitu

$P'(x) = 16x - 12x^2 + 16 = -4(-4x + 3x^2 - 4) = -4(3x + 2)(x - 2) = 0$

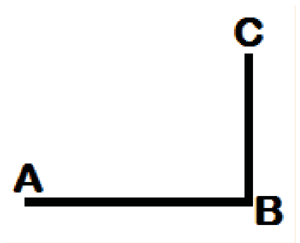
Diperoleh x = -3/2 atau x = 2. Karena x jumlah barang sehingga tidak mungkin nilai negatif, jadi keuntungan maksimum ada di x = 2, yaitu

$P(2) = 8(2)^2 - 4(2)^3 + 16(2) = 32$

Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan Rp 32.000,-

Latihan 9.3:

1. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan rata-rata 20 m/s selama 1 menit. Diketahui bahwa 30 detik pertama kecepatannya adalah 30 m/s. Berapakah kecepatan mobil pada 30 detik berikutnya?
2. Budi pergi ke sekolah naik sepeda. Jarak dari rumah ke sekolah 1,8 km dan kecepatan sepedanya konstan sebesar 3 m/s. Jika masuk sekolah jam 07.00, maka budi harus berangkat ke sekolah paling lambat pada pukul …
3. Sebuah motor bergerak dari Kota A pada pukul 07.15 dan tiba di Kota B pada pukul 08.45. Bila jarak Kota A – Kota B adalah 60 km. Kecepatan sepeda motor tersebut adalah…
4. Gambar berikut ini melukiskan perjalanan dari A ke C melalui B



Jarak AB = 40 km ditempuh dalam waktu 0,5 jam, jarak BC = 30 km ditempuh dalam waktu 2 jam. Besarnya kecepatan rata-rata perjalanan itu adalah …

5. Seoarang pelajar mengendarai sebuah sepeda dengan kecepatan yaitu 7,2 km/jam. Pada saat menanjak, kecepatan sepeda tersebut sebesar 0,5 m/s² selama 4 sekon. Berapakah percepatan akhir pelajar tersebut?

Rangkuman

1. Limit fungsi,jika x adalah variable pada himpunan bilangan asli $\{x \mid x < 4\}$, maka kita dapat dengan mudah menyebut anggota terbesar himpunan tersebut, yaitu 3. Tetapi dapatkah kita menyebut anggota terbesar himpunan bilangan itu jika x adalah variabel pada himpunan bilangan real? Dengan demikian kita dapat menyebut bilangan real pengganti variabel x yang mendekati 4 sedekat-dekatnya.Jadi, dapat disimpulkan jika x adalah variabel pada himpunan bilangan real maka x dapat mendekati bilangan 4 secara pendekatan limit
2. Sifat-sifat limit :

   Berapa teorema limit:

   Bila $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ Maka

   1. $\lim\limits_{x\to a} k$ = k; k konstan
   2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$
   3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \times B$
   4. $\lim\limits_{x\to a}[k.f(x)] = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = k.\ A$
   5. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$; dengan syarat b ≠0
   6. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = A^n$
   7. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt{A}$

3. Pada teorema limit dasar masih bisa kita terapkan pada limit di tak hingga. Namun, untuk kasus-kasus yang melibatkan bentuk tak tentu, seperti $(\sim - \sim)$, $(\frac{\sim}{\sim})$ atau $(0. \sim)$, perlu dilakukan manipulasi aljabar terlebih dahulu.

   Sifat A

   Jika n > 0 dan n bilangan rasional, maka

   1. $\lim\limits_{x\to\sim} \frac{1}{x^n} = 0$
   2. $\lim\limits_{x\to\sim} \frac{1}{x^n} = 0$, x^n terdefinisi untuk x < 0

   Sifat B

   Jika p(x) dan q(x) adalah fungsi polinom dengan ax^m dan bx^n berturut-turut adalah suku pangkat tertinggi dari p(x) dan q(x), maka

   1. $\lim\limits_{x\to\pm\sim} p(x) = \lim\limits_{x\to\pm\sim} aX^m$
   2. $\lim\limits_{x\to\pm\sim} q(x) = \lim\limits_{x\to\pm\sim} bX^n$
   3. $\lim\limits_{x\to\pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\sim} \frac{aX^m}{bX^n}$

   Sifat diatas mengatakan bahwa nilai limit di tak hingga fungsi polinom ataupun rasional sama dengan nilai limit dari suku pangkat tertingginya

   Sifat C

Misalkan p(x) dan q(x) adalah fungsi polinom dengan ax^m dan bx^n berturut-turut adalah suku pangkat tertinggi dari p(x) dan q(x).

1. Jika m = n maka $\lim_{x \to \pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{b}$
2. Jika m < n maka $\lim_{x \to \pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$
3. Jika m > n maka $\lim_{x \to \pm\sim} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \sim, & \frac{a}{b} > 0 \\ \sim, & \frac{a}{b} < 0 \end{cases}$

Sifat diatas dapat kita terjemahkan dalam tiga poin berikut.

1. Jika pangkat tertinggi pembilang = pangkat tertinggi penyebut, nilai limitnya adalah koefisien pangkat tertinggi pembilang dibagi koefisien pangkat tertinggi penyebut.
2. Jika pangkat tertinggi pembilang < pangkat tertinggi penyebut, nilai limitnya = 0.
3. Jika pangkat tertinggi pembilang > pangkat tertinggi penyebut, nilai limitnya = ~ (asalkan perbandingan koefisiennya positif) atau - ~ (asalkan perbandingan koefisiennya negatif)

4. Turunan fungsi menggunakan rumus : a. Turunan fungsi aljabar, b. Turunan fungsi khusus dan c. Aturan rantai.
5. Kecepatan dan kelajuan, Kecepatan adalah besaran vektor yang menyatakan perpindahan setiap detik. Sedangkan kelajuan adalah besaran skalar yang menyatakan jarak yang ditempuh tiap detik.

Kriteria Pindah Modul

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.
1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur
pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai
prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:
1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur
pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Saran Referensi

Buku teks Matematika Kurikulum 2013 SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI, Erlangga, 2014
Kalkulus Diferensial dan Integral. Teori & Aplikasi, Dr.Ir.Sudaryono.M.Pd, Prenada Media, 2017

Penilaian
Kunci Jawaban

Latihan 9.1.1

1. $\lim_{x \to 1} (x+3) = 4$

   Dengan tabel dapat diselidiki bahwa nilai x+3 mendekati nilai 4 jika nilai x mendekati 1, baik dari kiri maupun dari kanan.

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{x-2}$ = 2, sebab $\frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = \ x$ dan nilainya mendekati 2 jika nilai x mendekati 2, baik dari kiri maupun dari kanan .

3. $\lim_{x \to 3} f(x)$, jika $f(x) = \begin{cases} x-1; & x<3 \\ x; & x \geq 3 \end{cases}$ tidak punya limit, sebab limit kirinya 2 sedangkan limit kananny nernilai 3; jadi limit kiri dan limit kanan tidak sama.

4. Untuk $f(x) = \begin{cases} x+2; & x<2 \\ 4; & x \geq 2 \end{cases}$, nilai $\lim_{x \to 2} f(x)$ = 4 sebab limit kiri = limit kanan = 4

Latihan 9. 1.2

1. $\lim_{x \to 0} (3x+5) = 3.0+5 = 0+5 = 5$
2. $\lim_{x \to 5} (x^2+3) = 5^2+3 = 25+3 = 28$
3. $\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{2-1}{2.2+1} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+8} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$

5. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{(x^2-9)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x+3)} = \dfrac{1}{(3+3)} = \dfrac{1}{6}$

Latihan 9. 1.3

1. $\lim\limits_{x\to 3} 7 = 7$, sifat 1
2. $\lim\limits_{x\to 4} (3x-2) = \lim\limits_{x\to 4} 3x - \lim\limits_{x\to 4} 2 = 3.\lim\limits_{x\to 4} x - \lim\limits_{x\to 4} 2 = 3.4 - 2 = 12 - 2 = 10$
3. $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x+3) = \lim\limits_{x\to 2}(x-1).\lim\limits_{x\to 2}(x+3) = (2-1)(2+3) = 1.5 = 5$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x^2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3} x-2}{\lim\limits_{x\to 3} x^2} = \dfrac{3-2}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^3 = \left(\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)}{(x+1)}\right)^3 = \left(\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}\right)^3 = \left(\dfrac{(3-3)}{(3+1)}\right)^3 = \left(\dfrac{0}{4}\right)^3 = (0)^3 = 0$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x^2+9x}{3x}} = \sqrt{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} x^2+9x}{\lim\limits_{x\to 0} 3x}} = \sqrt{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} x(x+9)}{\lim\limits_{x\to 0} 3x}} = \sqrt{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x+9)}{\lim\limits_{x\to 0} 3}} = \sqrt{\dfrac{(0+9)}{3}} = \sqrt{\dfrac{9}{3}} = \sqrt{3}$

Latihan 9.2.1

1. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\sim} \dfrac{4x^4+2x^3-5x+4}{2x^4-4x^2+9} = ...$

$$\lim_{x\to\sim} \frac{4x^4+2x^3-5x+4}{2x^4-4x^2+9} = \frac{\frac{4x^4}{x^4}+\frac{2x^3}{x^4}-\frac{5x}{x^4}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{9}{x^4}} = \frac{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{2-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^4}} = \frac{4+0-0+0}{2-0+0} = \frac{4}{2} = 2$$

2. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\sim} \dfrac{(8x-2)^2}{(4x+1)^2}$ = adalah ….

$$\lim_{x\to\sim} \frac{(8x-2)^2}{(4x+1)^2} = \lim_{x\to\sim} \frac{(8x-2)(8x-2)}{(4x+1)(4x+1)} = \frac{64x^2-32x+4}{16x^2+8x+1} = \frac{\frac{64x^2}{x^2}-\frac{32x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{64-0+0}{16+0+0} = \frac{64}{16} = 4$$

3. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\sim} \dfrac{2x^2-3x+5}{x^2-3x+2} = ...$

$$\lim_{x\to\sim} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-3x+2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \frac{2-0+0}{1-0+0} = \frac{2}{1} = 2$$

4. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\sim} \dfrac{5x^2-2x+2}{4x-3}$ adalah….

$$\lim_{x\to\sim} \frac{5x^2-2x+2}{4x-3} = \frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{4x}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = \frac{5-0+0}{0+0} = \frac{5}{0} = 0$$

5. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\sim} \dfrac{3x-1}{x^2+5x-3} = ...$

$$\lim_{x\to\sim} \frac{3x-1}{x^2+5x-3} = \frac{\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = \frac{0-0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = \infty$$

Latihan 9.2.2

1. Seseorang mengendarai sepeda pada lintasan garis lurus dengan persamaan gerak.
s = f (t) = 15t + 4 dengan s dalam kilometer dan t dalam jam. Hitung kecepatan sesaat pada waktu t = 2 jam dan t = 4 jam.
Jawab :
Diketahui:
persamaan gerak s = f(t) = 15t + 4
ditanya:
kecepatan sesaat saat t = 2 dan t = 4
jawab:
s = f(t) = 15t-4
saat t = 2
s = f(2) = 15(2) - 4
= 30-4
= 26 km
kecepatan sesaat (v)
v = s/t
= 26/2
= 13 km/jam

saat t = 4
s = f(t) = 15t - 4
= 15(4) - 4
= 60-4
= 56 km
kecepatan sesaat (v)
v = s/t
= 56/4
= 14 km/jam

2. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut:
a) f(x) = 5(2x^2 + 4x)
b) f(x) = (2x + 3)(5x + 4)
Jawab:
Turunan pertama dari fungsi:
a) f(x) = 5(2x^2 + 4x)
f(x) = 10x^2 + 20x
f ‘ (x) = 20x + 20

b) f(x) = (2x + 3)(5x + 4)

Urai terlebih dahulu hingga menjadi
f (x) = $10x^2$ + 8x + 15x + 12
f (x) = $10x^2$ + 13x + 12

Sehingga
f ‘ (x) = 20x + 13

3. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus sehingga kedudukannya setelah x detik memenuhi persamaan f (x) = $6x^3 + x^2$, dengan f(x) dinyatakan dalam meter.
a. Tentukan kecepatan rata-rata benda dalam selang waktu 2 ≤ x ≤ 3.
b. Berapa kecepatan sesaat benda pada x = 2 detik?

Pembahasan :

a.
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\left(6\cdot 3^3+3^2\right)-\left(6\cdot 2^3+2^3\right)}{3-2}=119$$

Jadi, kecepatan rata-ratanya adalah 119 m/s.

b.
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(6(2+\Delta x)^3+\left(2+\Delta x^2\right)\right)-\left(6\cdot 2^3+2^2\right)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6\left(8+12\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x^3\right)+\left(4+4\Delta x+\Delta x^2\right)-52}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}6\Delta x^2+37\Delta x+76=76$$

Jadi, kecepatan pada saat x = 2 atau pada detik kedua adalah 76 meter/detik.

4. Panjang sebuah persegipanjang sama dengan tiga kali lebarnya. Tentukan laju perubahan luas terhadap lebar untuk lebar = 5 cm.
Jawaban :

Misalkan, lebar = *l* cm maka panjang = p = 3 × *l* = 3*l* dan luas =L = p × *l* = 3*l* . *l* = $3l^2$.

Jadi, L = f (*l*) = $3l^2$.

Laju perubahan luas terhadap lebar *l* untuk *l* = 5 adalah L ‘(5).

$$L'(5)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{L(5+h)-L(5)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(5+h)^2-3{,}5^2}{h}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\left(25+10h+h^2\right)-75}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{30h+3h^2}{h}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(30+3h)=30$$

5. Diketahui tinggi badan seorang anak pada usia 11 tahun sampai 12 tahun adalah tetap, yaitu T(t) = 120 cm. Tentukanlah laju pertumbuhan (laju pertumbuhan sesaat) tinggi badan anak tersebut. Jelaskan.

Jawab :

Tinggi badan anak tersebut pada usia 11 tahun sampai 12 tahun tetap. Oleh karena itu, T(t) = 120 adalah fungsi konstan sehingga T ‘(t) = 0. Dengan kata lain, laju pertumbuhan tinggi badan anak tersebut adalah nol atau tinggi badan anak tersebut pada usia 11 tahun sampai 12 tahun tidak mengalami perubahan.

Latihan 9.2.2:

Tentukan turunan dari setiap fungsi berikut:

1. *f* (x) = $4x^3+2x^2-5$
Jawab :
f (x) = $4x^3+2x^2-5$
f ’ (x) = $4.3x^{3-1}+2.2x^{2-1}-5$
= $12x^2+4x$
2. *f* (x) = $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3$– 25
Jawab :
f (x) = $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3$– 25
f ’ (x) = $\frac{1}{4}4x^{4-1}-\frac{1}{3}3x^{3-1}$– 25
= x^3-x^2
3. *f* (x) = $\frac{3}{\sqrt{x}}$
Jawab :
f (x) = $\frac{3}{\sqrt{x}}$
f (x) = 3.$\frac{1}{\sqrt{x}}$
= 3.$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
= $3x^{-\frac{1}{2}}$
f ’ (x) = $3x^{-\frac{1}{2}}$
= 3$\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$
= $-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
4. *f* (x) = (*x* – 3)(*x* + 5)
Jawab :
f (x) = (*x* – 3)(*x* + 5)
f (x) = $x^2+2x-15$
f ’ (x)= $x^2+2x-15$
= $2x^{2-1}+2.1x^{1-1}-15$

$= 2x + 2$

5. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

   Jawab :

   $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

   $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

   $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$

   $f'(x) = 1.\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 1.-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$

   $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

Latihan 9.3:

1. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan rata-rata 20 m/s selama 1 menit. Diketahui bahwa 30 detik pertama kecepatannya adalah 30 m/s. Berapakah kecepatan mobil pada 30 detik berikutnya?

   Diketahui:
   v = 20 m/s
   t = 1 menit = 60 s
   t_1 = 30 s
   v_1 = 30 m/s
   t_2 = 30 s

   Ditanyakan:
   v_2= ?
   Penyelesaian:
   $s_1 = v_1 . t_1$
   $s_1 = 30 . 30$
   s_1 = 900 m
   $s_2 = v_2 . t_2$
   $s_2 = v_2 . 30$
   $v = (s_1 + s_2) / (t_1 + t_2)$
   $20 = (900 + 30.v_2) / (30 + 30)$
   $20 = (900 + 30.v_2) / 60$
   $900 + 30.v_2 = 20 (60)$
   $900 + 30.v_2 = 1200$
   $30.v_2 = 300$
   $v_2 = 300/30$
   v_2 = 10 m/s

2. Budi pergi ke sekolah naik sepeda. Jarak dari rumah ke sekolah 1,8 km dan kecepatan sepedanya konstan sebesar 3 m/s. Jika masuk sekolah jam 07.00, maka budi harus berangkat ke sekolah paling lambat pada pukul …
   Jawab :
   Diketahui
   Ket :
   1 Km = 1000 m
   1 jam = 60 menit = 3600 sekon
   1 menit = 60 sekon

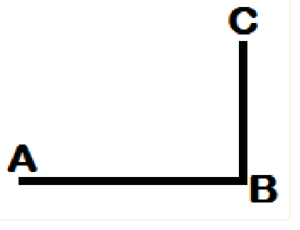
   masuk sekolah = 07.00
   s = 1,8 km = 1800 m
   V = 3 m/s
   t = ?

   maka
   t = s / V
   t = 1800 m/ 3 m/s
   t = 600 s = 10 menit

   maka waktu berangkat paling lambat = 07.00 - 00.10 = 06.50

3. Sebuah motor bergerak dari Kota A pada pukul 07.15 dan tiba di Kota B pada pukul 08.45. Bila jarak Kota A–Kota B adalah 60 km. Kecepatan sepeda motor tersebut adalah…
   Jawab :
   Diketahui :
   Waktu yang ditempuh : 07.15 – 08.45 = 90 menit = 1,5 jam
   Jarak Kota A – Kota B : 60 km
   Ditanyakan :
   Kecepatan sepeda motor tersebut.
   Rumus : *Kecepatan* = $\frac{jarak}{waktu}$
   $= \frac{60}{1,5}$
   = 40 km/jam

4. Gambar berikut ini melukiskan perjalanan dari A ke C melalui B



   Jarak AB = 40 km ditempuh dalam waktu 0,5 jam, jarak BC = 30 km ditempuh dalam waktu 2 jam. Besarnya kecepatan rata-rata perjalanan itu adalah …

Dik :
Jarak (s) AB = 40 km
waktu tempuh (t) AB = 0,5 jam
Jarak (s) BC = 30 km
waktu tempuh (t) BC = 2 jam
dit : v ?

dijawab :

$v = \frac{s\ total}{t\ total}$

$= \frac{40+30}{0,5+2}$

$= \frac{70}{2,5}$

= 28 km/jam

5. Seoarang pelajar mengendarai sebuah sepeda dengan kecepatan yaitu 7,2 km/jam. Pada saat menanjak, kecepatan sepeda tersebut sebesar 0,5 m/s² selama 4 sekon. Berapakah percepatan akhir pelajar tersebut?

   Pembahasan / Jawaban :

   Diketahui :

- v1 = 7,2 km/jam = 7,2 (1.000/3.600) m/s = 2 m/s
- a = − 0,5 m/s² (tanda negatif yaitu perlambatan)
- t = 4 s

Ditanya : v2 … ?

Penyelesaian :

a = (v2 – v1)/t
v2 = v1 + at
v2 = 4 + (− 0,5 × 2)
v2 = 3 m/s
v2 = 10,8 km/jam

Daftar Pustaka

Hidayat Agus, Drs, Modul Matematika Program Paket C setara SMA, CV Arya Duta, 2010

Kasmina dkk, Matematika Program Keahlian Teknologi, Kesehatan dan Pertanian untuk SMK dan MAK Kelas XII, Penerbit Erlangga

Menghitung Limit Fungsi yang Mengarah ke Konsep Turunanhttps://www.google.com/search?q=materi+limit+fungsi+dan+turunan&oq=LIMIT+FUNGSI+DAN+TURUNAN&aqs=chrome.3.69i57j0l5.16112j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8

Limit Fungsi
http://petapel.blogspot.com/2014/06/limit-fungsi-materi-sma.html

Turunan Fungsi Aljabar
https://smatika.blogspot.com/2016/04/turunan-fungsi-aljabar_11.html

Turunan Fungsi Aljabar dan Trigonometri SMA dan SMK
http://adjiemsainsoal00.blogspot.com/2014/05/turunan-fungsi-aljabar-dan-trigonometri_8481.html

Kecepatan dan Kelajuan
https://www.wardayacollege.com/fisika/kinematika/gerak-lurus/kecepatan-kelajuan

PROFIL PENULIS

Nama Lengkap : Nursanto

Telp Kantor/HP : 021-85903277 ext.0/ 0812 1241 0388

E-Mail : nursanto14@gmail.com

Alamat Kantor : Jl. Kober Pedati Rt.007 Rw.02
Kelurahan Balimester Kecamatan Jatinegara
Kota Administrasi Jakarta Timur.

Bidang Keahlian :

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Mengajar di PKBM FIZAR (Tahun 2005 – sekarang)
2. Mengajar di PKBM Awwaliyah Rohiim (Tahun 2011 – sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S1 MIPA Jurusan Matematika lulus tahun 1994